

基礎物理学

担当 小野正利
onomasat@hoku-iryo-u.ac.jp

第4回

教科書

(1)「基礎物理学」

(2) <http://www.hoku-iryo-u.ac.jp/~onomasat/>

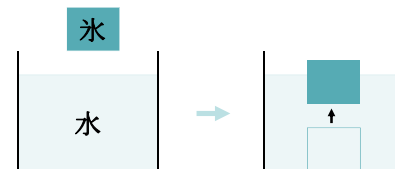
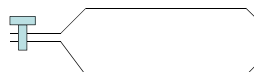


基礎物理あれこれ

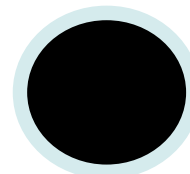


基礎物理学 問題 第3回

問題3 図のような鉄の容器（ボンベ）を、真空にして重さをはかり、次に水素をつめて重さをはかった。真空のときと水素をつめたときとで、その重さはどうなるか。下のア、イのうち、正しいものに○をつけよ。（はかりは十分精密なものとする）。
ア. 真空のときの方が重い。
イ. 水素をつめたときの方が重い。



大気

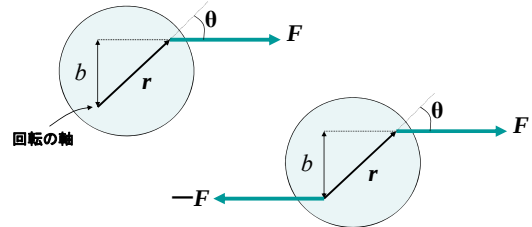




トルク(力のモーメント)

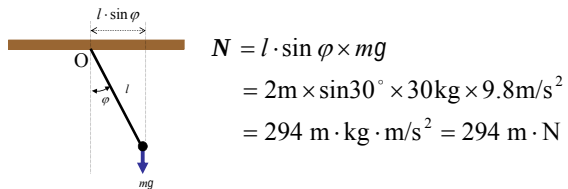
$$N \equiv b F = r F \sin \theta$$

$$\rightarrow N = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$



基礎物理学 問題 第3回

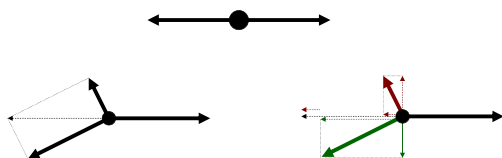
問題4 点Oを支点とする長さ $l(=2\text{m})$ の振り子に働く力のモーメント N を求めよ。棒の質量は無視できるものとする。また、棒の先端につけた物体の質量 m は 30kg 、重力加速度 g の値は 9.8 m/s^2 、角度 φ の値は 30 度とする。



物体の平衡(静止の状態)

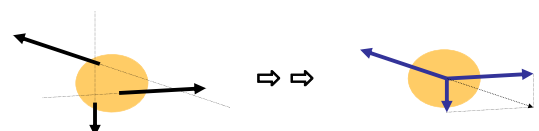
平衡の条件(静止の条件)

○ 質点の場合 → 質点に働く外力の和がゼロ



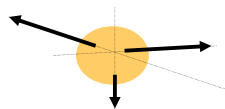
○ 大きさのある物体の場合

(イ) 全ての外力のベクトル和がゼロ

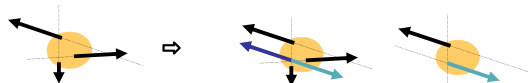


(ロ) 任意の位置の周りのトルクの和がゼロ。

力のモーメントがゼロの例 (回転が起こらない例)



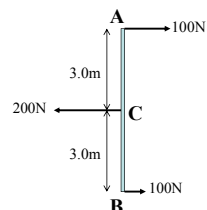
力のモーメントがゼロでない例 (回転が始まる例)



移動しない、しかし、回転する

基礎物理学 問題 第3回

問題5 紙面の手前から裏側を回転の正の方向とする。右の図の場合について、A点の回りのモーメントを求めよ。



A点の回りの力のモーメント

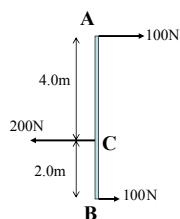
$$= 3\text{m} \times 200\text{N} - 6\text{m} \times 100\text{N} = 0 \text{ m} \cdot \text{N}$$

(参考) B点の回りの力のモーメント

$$= 6\text{m} \times 100\text{N} - 3\text{m} \times 200\text{N} = 0 \text{ m} \cdot \text{N}$$

基礎物理学 問題 第3回

問題6 紙面の手前から裏側を回転の正の方向とする。右の図の場合について、A点の回りのモーメントを求めよ。



A点の回りの力のモーメント

$$= 4\text{m} \times 200\text{N} - 6\text{m} \times 100\text{N} = 200 \text{ m} \cdot \text{N}$$

(参考) B点の回りの力のモーメント

$$= 6\text{m} \times 100\text{N} - 2\text{m} \times 200\text{N} = 200 \text{ m} \cdot \text{N}$$



運動の第2法則

運動量 mv が時間によって変化する割合は、その物体に働く力 f に比例し、その力の方向に生じる。(注: v は速度)

$$ma = f$$

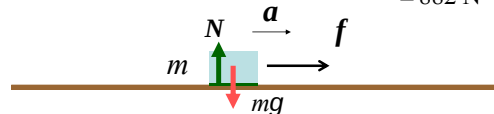
一様な重力場の中の運動 $f = mg$

力の単位 N ($\text{kg} \cdot \text{m/s}^2$)

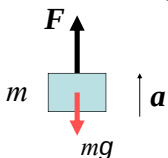
基礎物理学 問題 第3回

問題1 30 kg の物体を $3g$ の加速度で水平に移動させる時の力は何 N か。ここで g は重力加速度 ($g \equiv 9.8 \text{ m/s}^2$) を表す。ただし、物体は滑らかで水平な台の上に載っているものとする。

$$\begin{aligned} f &= ma = 30 \text{ kg} \cdot 3g \\ ma &= f \\ &= 30 \text{ kg} \times 3 \times 9.8 \text{ m/s}^2 = 882 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2 \\ &= 882 \text{ N} \end{aligned}$$



問題2 30 kg の物体を $3g$ の加速度で鉛直上方に持ち上げるのに必要な力 F は何Nか。ここで g は重力加速度 ($g \equiv 9.8 \text{ m/s}^2$) を表す。

$ma(=f)=F-mg$

 大事な点は
 f は質量 m の物体に働いている外力の和(合力)を表している。
 $\therefore F = ma + mg = m \cdot 3g + mg$
 $= 4mg = 4 \times 30 \text{ kg} \times 9.8 \text{ m/s}^2$
 $= 1176 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2 = 1176 \text{ N}$



◎ 運動の例と演習

1. 放物運動

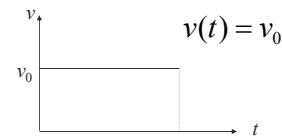
(1) 直線運動の速度

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} \frac{dx}{dt}$$

(2) 直線運動の加速度

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} \frac{dv}{dt}$$

〔(3) 速度一定の運動(等速度運動)〕



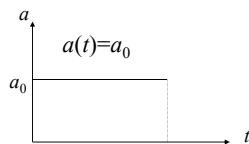
$$v_0 = \frac{\Delta x}{\Delta t} \equiv \frac{x(t) - x(0)}{t - 0} = \frac{x(t) - x(0)}{t}$$

この式から $\Delta x = x(t) - x(0) = v_0 \Delta t = v_0 t$

$$x(t) = x(0) + v_0 t = x_0 + v_0 t$$

ただし, $x(0) \equiv x_0$

(4) 加速度一定の運動(等加速度運動)



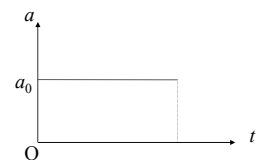
$$v_0 = \frac{\Delta v}{\Delta t} \equiv \frac{v(t) - v(0)}{t - 0} = \frac{v(t) - v(0)}{t}$$

この式から $\Delta v = v(t) - v(0) = a_0 \Delta t = a_0 t$

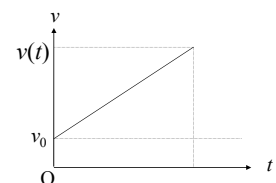
$$v(t) = v(0) + a_0 t = v_0 + a_0 t$$

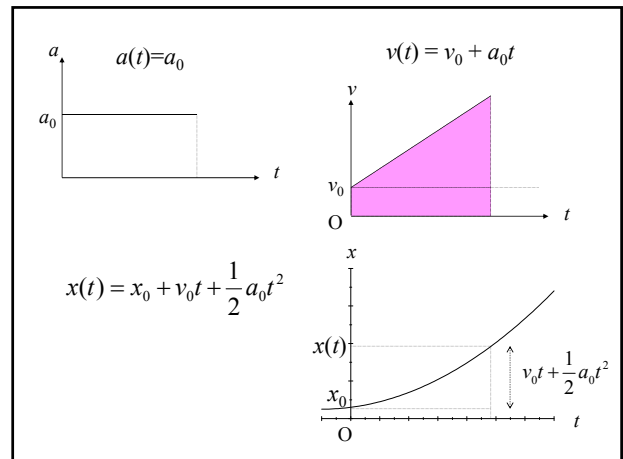
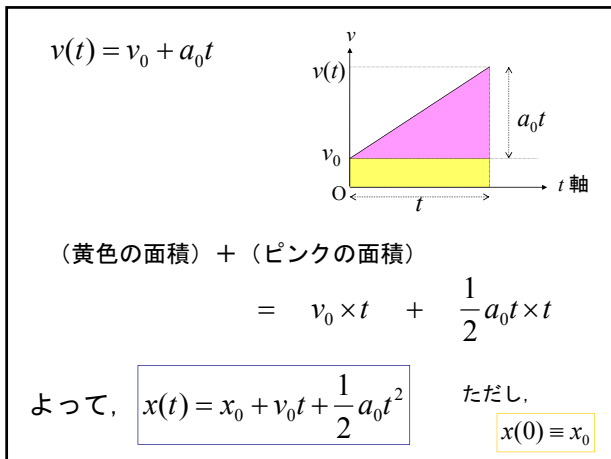
ただし, $v(0) \equiv v_0$

$$a(t) = a_0$$



$$v(t) = v_0 + a_0 t$$





一様な重力場の中の運動(落下運動)
鉛直上方を z 方向とする

加速度は $a(t) = -g$
(g は重力加速度)

従って, 速度: $v(t) = v_0 - gt$

位置: $z(t) = z_0 + v_0 t - (1/2) g t^2$

(5) 放物運動

x 方向: $x(t) = (v_0 \cos \alpha) \cdot t$

y 方向: $y(t) = h + (v_0 \sin \alpha) \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$

$\mathbf{v}_0 = v_0 \cos \alpha \cdot \mathbf{i} + v_0 \sin \alpha \cdot \mathbf{j}$



2. 摩擦と束縛運動

摩擦力

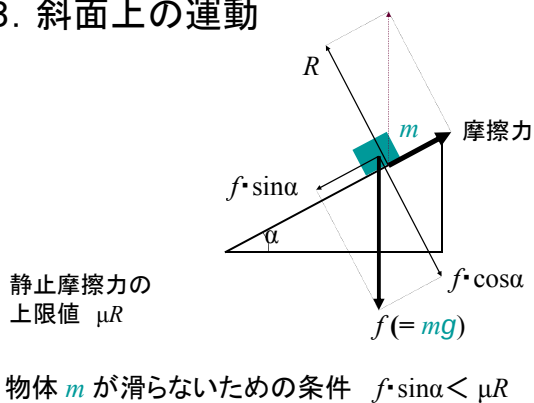
摩擦の法則

静止摩擦力 $F_f \leq \mu R$

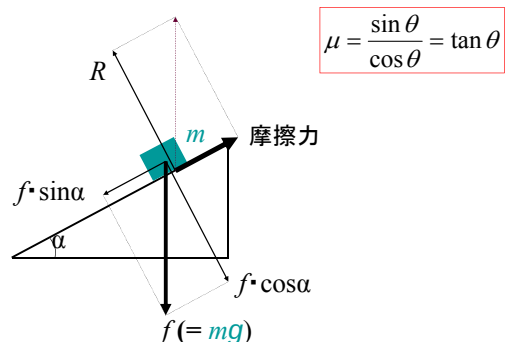
R : 垂直抗力

μ : 静止摩擦係数

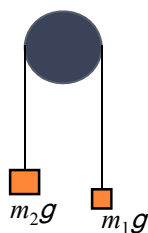
3. 斜面上の運動



α を大きくしていったとき、物体 m が滑り始めるときの角度が摩擦角 θ



4. Atwoodの機械



<問題4>

1. 速度と位置が時間の関数として次のように与えられている。

$$v(t) = v_0 + at$$

$$x(t) = x_0 + v_0 t + (1/2)gt^2$$

(1) $x(t)$ を次の式に従って計算して $v(t)$ を導く。

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

(2) $v(t)$ を次の式に従って計算して $a(t)$ を導く。

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$

<問題4>

2. 次の関数を時間 t で微分せよ。

(1) $2x^2$ (2) $7xy$

$\rightarrow 4x \frac{dx}{dt}$ $\rightarrow 7 \frac{dx}{dt} y + 7x \frac{dy}{dt}$

(3) $6x^2 y z^3$

$\rightarrow 12x \frac{dx}{dt} y z^3 + 6x^2 \frac{dy}{dt} z^3 + 18x^2 y z^2 \frac{dz}{dt}$

(3) $5t^2 \rightarrow 10t$

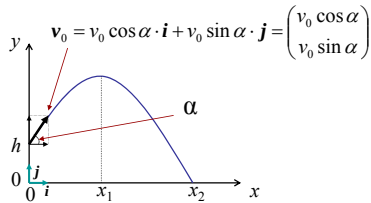
<問題4>

3. 身長 $h=180$ cm の人が、水平と角 $\alpha=30^\circ$ をなす方向に、ボールを速さ $v_0=20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ で投げる。

(1) ボールが最高点に達するのは、投げてから何秒後か、空気の抵抗は無視して考えよ。

(2) ボールが地上に落ちる点は、投げた点からどれだけ離れているか。

(1) ボールが最高点に達するのは、投げてから何秒後か、空気の抵抗は無視して考えよ。

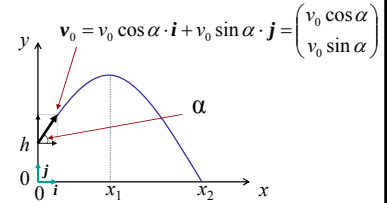


運動方程式

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = 0$$

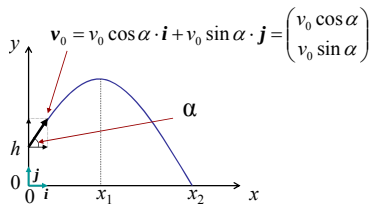
$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -mg$$

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = 0$$



$$x \text{ 方向 } m \frac{d^2 x}{dt^2} = 0 \rightarrow m \frac{dx}{dt} = mv_0 \cos \alpha$$

$$y \text{ 方向 } m \frac{d^2 y}{dt^2} = -mg \rightarrow m \frac{dy}{dt} = -mgt + mv_0 \sin \alpha$$



最高点では y 方向の速度成分がゼロ

$$x \text{ 方向 } \frac{d^2 x}{dt^2} = 0 \rightarrow \frac{dx}{dt} = v_0 \cos \alpha$$

$$y \text{ 方向 } \frac{d^2 y}{dt^2} = -g \rightarrow \frac{dy}{dt} = -gt + v_0 \sin \alpha$$

最高点では y 方向の速度成分がゼロ

$$\frac{dy}{dt} = -gt + v_0 \sin \alpha = 0$$

$$\therefore t = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{20 \text{ m/s} \cdot \sin 30^\circ}{9.8 \text{ m/s}^2} = \frac{10}{9.8} \text{ s} \approx 1.02 \text{ s (秒)}$$

(2) ボールが地上に落ちる点は、投げた点からどれだけ離れているか。

$$x \text{ 方向 } \frac{dx}{dt} = v_0 \cos \alpha \rightarrow$$

$$x = (v_0 \cos \alpha) \cdot t + x_0 = (v_0 \cos \alpha) \cdot t$$

$$y \text{ 方向 } \frac{dy}{dt} = -gt + v_0 \sin \alpha \rightarrow$$

$$y = -\frac{g}{2} t^2 + (v_0 \sin \alpha) \cdot t + y_0 = -\frac{g}{2} t^2 + (v_0 \sin \alpha) \cdot t + h$$

ボールが地上に落ちる点は、 $y = 0$ の時刻 t_1 を求めることにより $t_1 v_0 \cos 30^\circ$ から得られる。

$$y = -\frac{g}{2} t^2 + (v_0 \sin \alpha) t + y_0 = -\frac{9.8}{2} t_1^2 + 10 t_1 + 1.8 = 0$$

$$t_1 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot (-4.9) \cdot 1.8}}{2 \cdot (-4.9)}$$

$$= \frac{-10 \pm \sqrt{135.28}}{-9.8} \approx \frac{10 \mp 11.63}{9.8}$$

$$\approx \begin{cases} -0.166 \text{ s} \\ 2.207 \text{ s} \end{cases}$$

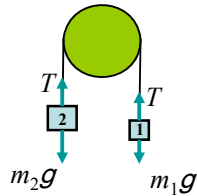
$$at^2 + bt + c = 0$$

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\therefore x_2 \approx 2.207 \text{ s} \cdot 20 \cos 30^\circ \text{ m/s} \approx 38.226 \text{ m}$$

<問題4>

4. 滑らかな滑車にひもをかけて、両側に m_1, m_2 のおもりをつるした装置をアットウツドの機械という。

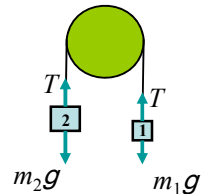


- (1) ひもの張力を T として、それぞれのおもりの運動方程式を書け。

$$\begin{cases} m_1 a_1 = T - m_1 g \\ m_2 a_2 = T - m_2 g \end{cases}$$

$$a = a_1 = -a_2$$

$$\begin{cases} m_1 a = T - m_1 g \\ -m_2 a = T - m_2 g \end{cases}$$



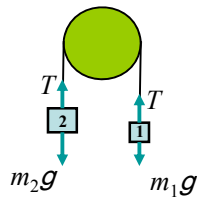
- (2) 上の二つの式から T を消去して、おもりが動く加速度を求めよ。

$$\begin{cases} m_1 a_1 = T - m_1 g \\ m_2 a_2 = T - m_2 g \end{cases}$$

$$a = a_1 = -a_2$$

$$\begin{cases} m_1 a = T - m_1 g \\ -m_2 a = T - m_2 g \end{cases}$$

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g$$



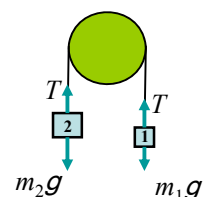
- (3) 張力 T を求めよ。

$$\begin{cases} m_1 a_1 = T - m_1 g \\ m_2 a_2 = T - m_2 g \end{cases}$$

$$a = a_1 = -a_2$$

$$\begin{cases} m_1 a = T - m_1 g \\ -m_2 a = T - m_2 g \end{cases}$$

$$T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$



<問題4>

5. 力が作用していない時の長さ(自然の長さ)が同じ l [m] で、ばね定数 k_1, k_2 の二つのばねを並列および直列につなぐことを考える。それぞれの場合に同じ質量 m [kg] を持つ物体をつるした。自然の長さからの伸びを求めよ。

直列

$$k_1 x_1 = mg$$

$$k_2 x_2 = mg$$

$$x = x_1 + x_2 = mg \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right)$$

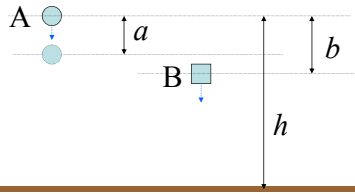
並列

$$k_1 x + k_2 x = mg$$

$$x = \frac{mg}{k_1 + k_2}$$

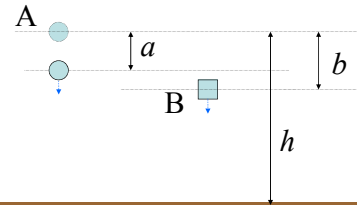
<問題4>

6. 物体 A が高さ h [m] から落下する。 a [m] 落下したとき、高さ $(h-b)$ [m] の高さから物体 B が落下して、二つの物体 A, B が同時に地上に達した。 h を求めよ。また、B が落下するまでの時間を求めよ。



$$a = \frac{1}{2}gt_0^2 \rightarrow v_0 = gt_0 = g\sqrt{\frac{2a}{g}} = \sqrt{2ag}$$

$$h-a = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t, \quad h-b = \frac{1}{2}gt^2$$



$$b-a = v_0t \rightarrow t = \frac{b-a}{v_0} = \frac{b-a}{\sqrt{2ga}}$$

$$h = b + \frac{1}{2}gt^2 = b + \frac{(b-a)^2}{4a}$$

